

Zadaci s pismenih ispita iz Matematike I drugi dio

1. Zadani su vektori $\vec{a} = \vec{i} + (2\lambda + 1)\vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j} + 2\vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Odredite $\lambda \in \mathbb{R}$, tako da zadani vektori budu komplanarni i prikažite vektor \vec{c} kao linearnu kombinaciju \vec{a} i \vec{b} .
2. Odredite jednadžbu ravnine koja sadrži presječnicu ravnina $3x + 2y + 5z + 6 = 0$ i $x + 4y + 3z + 4 = 0$, a usporedna je s osi x.
3. Odredite jednadžbu ravnine koja sadrži presječnicu ravnina $3x + 2y + 5z + 6 = 0$ i $x + 4y + 3z + 4 = 0$, a usporedna je s pravcem $\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-3}$.
4. Napišite jednadžbu ravnine koja sadrži presječnicu ravnina $x+y = 0$ i $x-y+z-2 = 0$ a paralelna je pravcu $x = y = z$.
5. Odredite jednadžbu ravnine koja sadrži pravac

$$\frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{z-3}{3}$$

i okomita je na ravninu $2x - 4y + z = 0$.

6. Odredite jednadžbu pravca koji leži u ravnini $3x - 2y - 2z = 1$, prolazi točkom $T(1,0,1)$ i okomit je na os z.
7. U ravnini $3x - 2y + z + 2 = 0$ odredite točku koja je jednako udaljena od točaka $A(3, 2, 0)$, $B(1, 2, 0)$, $C(0, 0, -3)$.
8. U ravnini $z = 0$ odredite pravac čija je svaka točka jednako udaljena od točaka $A(2,4,0)$ i $B(4,0,4)$.
9. Na pravcu $x=y=z$ odredite točku koja je jednako udaljena od točaka $A(2,4,0)$ i $B(4,0,4)$.
10. Na pravcu

$$\frac{x+2}{6} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-4}$$

odredi točku jednako udaljenu od ravnina $x - 2y + 2z = 0$, $-2x + 4y - 4z + 12 = 0$.

11. Na pravcu

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$$

odredi točku jednako udaljenu od ravnina $x - 2y + 2z = 0$, $-x + 2y - 2z + 6 = 0$.

12. Na pravcu $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1}$, $z = -3$ odredite točku jednako udaljenu od ravnina $x - 4y + 3z = 0$, $-x + 4y - 3z + 6 = 0$.

13. Na pravcu

$$\frac{x+2}{6} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-4}$$

odredi točku jednako udaljenu od ravnina $x - 2y + 2z = 0$, $-2x + 4y - 4z + 12 = 0$.

14. Odredite:

(a) jednadžbu ravnine u kojoj leži točka $M(1,2,3)$ i pravac $x=t+1$, $y=2t$, $z=3t-2$

(b) jednadžbu pravca koji je paralelan zadanom pravcu a prolazi točkom M .

15. Odredite cjelobrojni parametar λ , tako da se pravci

$$\frac{x+4}{\lambda} = y-2 = z \quad , \quad x+3 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{\lambda}$$

sijeku. Za određeni λ napišite jednadžbu ravnine kojoj pripadaju.

16. Odredite jednadžbu ravnine u kojoj leži točka $M(1,2,0)$ i pravac $x=t+1$, $y=2t$, $z=3t-2$. Kolika je udaljenost te ravnine od ishodišta?

17. Odredite udaljenost točke $A(1,2,0)$ od pravca koji prolazi točkama $B(-1,-1,-1)$ i $C(2,2,2)$.

18. Zadani su vrhovi tetraedra $A(3,-2,1)$, $B(2,5,0)$, $C(-2,4,0)$, $D(0,0,10)$. Napišite jednadžbu pravca na kojem leži visina v_D tetraedra.

19. Točke $T_1 = (-1, 0, 0)$, $T_2 = (0, -2, 0)$, $T_3 = (1, -2, 1)$ su tri vrha tetraedra. Odredite jednadžbu ravnine u kojoj treba ležati četvrti vrh da bi volumen tetraedra iznosio 4 volumne jedinice.

20. Točke $T_1 = (-1, 0, 0)$, $T_2 = (0, -2, 0)$, $T_3 = (1, 1, 1)$ su tri vrha tetraedra. Odredite jednadžbu ravnine u kojoj treba ležati četvrti vrh da bi volumen tetraedra iznosio 4 volumne jedinice.

21. Na pravcu $x-1 = y = z+1$ odredite točku D tako da volumen tetraedra čiji su vrhovi $A(3, 2, 0)$, $B(1, 2, 0)$, $C(0, 0, -3)$, $D(?, ?, ?)$ iznosi 1 volumnu jedinicu.

22. Neka su

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3} \quad , \quad \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$$

kanonske jednadžbe pravaca p_1 i p_2 . Odredite jednadžbu pravca koji prolazi točkom $T(1,1,1)$ i siječe pravce p_1 i p_2 .

23. Za koju vrijednost od A je ravnina $Ax + 3y - 5z + 1 = 0$ paralelna pravcu

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{3} = z.$$

Odredi projekciju pravca na tu ravninu.

24. Odredite jednadžbu ravnine s obzirom na koju su pravci $p_1 \dots \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$, $p_2 \dots \frac{x+1}{1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-2}{1}$ međusobno zrcalno simetrični.
25. Na osi z odredite točku koja je jednako udaljena od pravaca $p_1 \dots \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$, $p_2 \dots \frac{x+1}{1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-2}{1}$.
26. Odredite udaljenost točke A(4,-5,4) od ravnine u kojoj leže pravci p_1 i p_2 . Pravac p_1 presječnica je ravnina $x - y + z - 3 = 0$ i $x + y + z - 1 = 0$, a pravac p_2 presječnica je ravnina $y = 0$ i $x + z = 0$.
27. Napišite jednadžbu pravca koji prolazi točkom T(1,2,-1), paralelan je ravnini $\pi \dots -3x + 2y + 3z + 6 = 0$ i siječe pravac $q \dots \frac{x+1}{2} = y = z + 1$.
28. Napišite jednadžbu pravca koji prolazi točkom A(2,6,3), paralelan je s ravinom $\pi \dots x - 2y + 3z - 5 = 0$ i siječe pravac $q \dots \frac{x-2}{-5} = \frac{y-2}{-8} = \frac{z-6}{2}$.
29. Odredi jednadžbu ravnine koja prolazi točkom T(3,-1,-2) i paralelna s pravcima $p_1 \dots \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z-1}{2}$, $p_2 \dots \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+4}{-7}$. Kolika je udaljenost te ravnine od ishodišta?
30. Točke A=(-1,1,0), B=(1,0,0), D=(0,0,1) su tri vrha baze paralelepipeda. Na pravcu $x + 1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$ koji prolazi točkom A odredite vrh paralelne baze tako da volumen iznosi 16 volumnih jedinica.
31. Pravac p presječnica je ravnina $5x - 3y + 2z - 5 = 0$ i $2x - y - z - 1 = 0$. Napišite kanonske jednadžbe tog pravca. U kojoj točki pravac p probada ravninu $z = 1$? Leži li pravac p i u ravnini $4x - 3y + 7z - 7 = 0$?
32. Nađite jednadžbu ravnine koja sadrži pravac $\frac{x-1}{2} = \frac{z-3}{3}$, $y = -2$ i koja je okomita na ravninu $2x - 4y + z = 0$. Kolika je udaljenost točke T(1,1,1) od te nađene ravnine?
33. Odredite točku Q simetričnu točki P(4,1,6) obzirom na pravac
- $$\frac{x+2}{2} = \frac{y-7}{-2} = z.$$
34. Odredite točku Q simetričnu točki P(2,-3,2) obzirom na ravninu $x + 2y + 2z - 9 = 0$.
35. Odredite udaljenost između dva zadana pravca:
pravaca $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2}$, $z = -1$;
i pravaca $x = 4z - 2$, $y = z - 1$.
36. Odredite jednadžbu ravnine koja sadrži os y i sjecište pravaca
 $p_1 \dots \frac{x+2}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-4}{-1}$, $p_2 \dots \frac{x+3}{2} = \frac{y-8}{-5} = \frac{z+5}{4}$.
37. Odredite jednadžbu pravca koji leži u ravnini $3x - z = 0$ a siječe pravac
 $\frac{x+3}{2} = \frac{y-8}{-5} = \frac{z+5}{4}$ pod pravim kutem.

38. Odredite ortogonalnu projekciju točke $T(1, 1, 1)$ na pravac koji je presječnica ravnina $x + y + z = 3$ i $x - 2y + z = 1$.
39. Na pravcu $\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ odredite točku koja je najbliža pravcu $x = t, y = t, z = 2$.
40. Odredite ortogonalnu projekciju točke $T(0, 5, -1)$ na pravac koji je presječnica ravnina $x + y = 0$ i $x - z + 3 = 0$.
41. Napišite jednadžbu pravca na kojem leži visina v_a trokuta čiji su vrhovi $A(5,2,3)$, $B(8,3,-5)$ i $C(5,0,7)$.
42. Nađite šiljasti kut između ravnine $x + y + 3z - 1 = 0$ i pravca određenog kao presječnica ravnina $x + y + z - 4 = 0$ i $2x - y + 4z + 5 = 0$.
43. Odredite kuteve koje s koordinatnim osima zatvara pravac određen kao presječnica ravnina $3x - y + 2z = 0$ i $6x - 3y + 2z - 2 = 0$.
44. Kojoj je točki pravca
$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{7} = \frac{z-11}{-5}$$
 pri ortogonalnoj projekciji na ravninu $x + 2y + 3z = 0$ projekcija ishodište?
45. Točka T leži na pravcu $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-4}{4}$. Odredite koordinate točke T tako da ortogonalna projekcija točke T na pravac $\frac{x}{-4} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ bude ishodište.
46. Odredite jednadžbu ravnine koja je okomita na zadanu ravninu $2x - 4y + z + 5 = 0$ i prolazi pravcem koji je presječnica ravnina $x + y - z + 4 = 0$ i $2x - y - z = 1$.
47. Odredite jednadžbu ravnine koja je okomita na zadanu ravninu $2x - 4y + z + 3 = 0$ i prolazi pravcem koji je presječnica ravnina $x + y - z + 3 = 0$ i $2x - y - z = 3$.
48. Točke u kojima koordinatne osi probadaju ravninu $3x - y + 4z - 12 = 0$ vrhovi su trokuta. Napišite jednadžbu pravca na kojem leži visina trokuta povučena iz vrha $C(0,0,3)$.
49. Odredite ortogonalnu projekciju točke $T(-2,5,3)$ na pravac $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = z-6$. Kolika je površina trokuta čiji su vrhovi točka T , njena projekcija i ishodište?
50. Odredite kut koji zatvara brid tetraedra na kojem leže vrhovi A i D s ravninom baze ABC , ako su vrhovi tetraedra $A(0, -1, 1)$, $B(1, 1, 5)$, $C(-3, 2, -2)$ i $D(2, 5, -2)$.
51. Odredite kut koji zatvara pravac koji je presječnica ravnina $x + y + z - 2 = 0$, $2x + y - z - 1 = 0$ i ravnina u kojoj leže točke $A(2,3,-1)$, $B(1,1,0)$, $C(0,-2,1)$.
52. Odredite ortogonalnu projekciju pravca $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+3}{5}$ na ravninu $x + y + 4z - 9 = 0$.

53. Točkama $A(a,2,2)$ i $B(2,1,1)$ prolazi pravac p_1 , a točkama $C(3,0,3)$ i $D(4,-1,2)$ pravac p_2 . Odredi a tako da pravci p_1 i p_2 leže u istoj ravnini. Napišite jednadžbu te ravnine.
54. Ortogonalna projekcija pravca p koji leži u ravnini $x + y + 2z - 6 = 0$ na ravninu $z = 0$ je pravac $y = x$. Odredite kanonske jednadžbe pravca p .
55. (a) Odredite A i B tako da pravac $p \dots x - 1 = y - 2 = z - 3$ leži u ravnini $\pi \dots Ax + By + z + 1 = 0$.
- (b) Odredite jednadžbu ravnine, koja je okomita na ravninu π a prolazi pravcem p .
56. U trokutu $A(4,4,-3)$, $B(-2,-2,3)$, $C(2,1,4)$ odredi duljinu visine v_c i jednadžbu pravca na kojem ta visina leži.
57. Odredite jednadžbu pravca simetričnog pravcu $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$ s obzirom na ravninu $x + 2y + 3z = 0$.
58. Odredite jednadžbu pravca koji prolazi točkom $T(0,3,0)$ okomit je na os y i siječe pravac $\frac{x+2}{2} = \frac{y-7}{-2} = z$.
59. Odredite jednadžbu pravca koji prolazi ishodištem okomit je na os x i siječe pravac $\frac{x+2}{2} = \frac{y-7}{-2} = z$.